数理解析研究所講究録
718巻 1990年 144-164

概均質ベクトル空間の理論(筑波大学での集中講義の補足)

行者明彦　大阪大学教養部
(GYOJA AKIHIKO)

以下、1988年10月25日から28日まで、筑波大学の集中講義で、話したことに、少し補足を加えます。この集中講義の、木村達雄氏のノートが、この講究録の中に収録されていますので、定義，記号等の説明は、くり返さず、必要な場合には[Tsukuba;……]という形で、木村達雄氏のノートを引用することにします。

この場で、木村達雄氏に感謝したく思います。木村氏には、集中講義という形で、私に話す機会を与えていただき、熱心に聞いて、すばらしいノートをまとめていただき、いくつもの有益な指摘をされ、また、宿泊のこと等々……何から何までお世話になりました。心から感謝致します。

また、筑波大学のスタッフ・大学院生の方々、そして、わざわざ他大学から聴講に来られた方々のおかげで、筑波滞在が、実り豊かな、楽しい時になりました。ありがとうございました。

§7. [Tsukuba; 定理B] は、$\Omega^{\vee}(\mathbb{R})$ 上の等式を与えるにすぎないこと、ω_j が、十分、具体的には、与えられていないこ

と、等、いくつか弱点が、あります。ここでは、これらの点を改良します。

$\alpha \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, 2, \cdots$ に対して、$D(V^\vee)$-module $D(V^\vee) u_{\alpha,k}$ を、次の方程式系により定める。

(1) $\left(\sum_{\lambda,\mu=1}^{n} (-a_{\mu\lambda}) y_\mu \frac{\partial}{\partial y_\lambda} - (\phi_0 + \alpha\phi)(A) \right) u_{\alpha,k} = 0$

$(A \in \mathrm{Lie}(G), \quad \rho(A) = (a_{\lambda,\mu}), \quad \phi_0(A) = \mathrm{trace}\, \rho(A))$

(2) $\forall \varphi \in \mathbb{C}[V^\vee] \qquad \varphi \equiv 0 \text{ on } O_1^\vee \Rightarrow f^{\vee k} \varphi u_{\alpha,k} = 0$.

ここで、記号・約束については、[Tsukuba ; §3, lemma 8] に従う。

Lemma 1. k が十分大きければ、

$$D(V^\vee) u_{\alpha,k} [f^{\vee -1}] \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(D(V) f^\alpha) [f^{\vee -1}]$$
$$u_{\alpha,k} \longmapsto \mathcal{F}(f^\alpha)$$

∵) $\mathbb{C}[V^\vee]$ のイデアル $\{ \varphi \in \mathbb{C}[V^\vee] \mid \varphi \equiv 0 \text{ on } O_1^\vee \}$ の生成系を $\varphi_1, \cdots, \varphi_N$ とすると [Tsukuba ; §3, lem. 7] より、

$\forall j \ \exists k_j \geq 0 \qquad f^{\vee k_j} \varphi_j \mathcal{F}(f^\alpha) = 0$.

$k = \max\{k_1, \cdots, k_N\}$ とすると

$$\forall \varphi \in \mathbb{C}[V^\vee] \qquad \varphi \equiv 0 \text{ on } O_1^\vee \Rightarrow f^{\vee k}\varphi\, \mathcal{F}(f^\alpha) = 0.$$

すなわち．$\mathcal{F}(f^\alpha)$ は．方程式系 (2) をみたす。[Tsukuba ; §3. lem. 8] より．$\mathcal{F}(f^\alpha)$ は．方程式系 (1) もみたすから D-module homomorphism (onto)

$$D\, u_{\alpha,k} \longrightarrow \mathcal{F}(D f^\alpha)$$

$$u_{\alpha,k} \longmapsto \mathcal{F}(f^\alpha)$$

を得る。この homomorphism は．$f^\vee$ で．局所化すると．同型写像になる。▨

<u>記号</u> $A_+ = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid b(\alpha+j) \neq 0, \quad \forall j = 0, 1, 2 \cdots\}$

$A_- = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid b(\alpha-j) \neq 0, \quad \forall j = 1, 2, 3, \cdots\}$

とおく．

<u>定理 B (D-module version)</u> $\alpha \in A_+$ ならば．

$$\mathcal{F}(Df^\alpha) \simeq D\, u_{\alpha,k}[f^{\vee -1}] \qquad (\forall k \gg 0)$$

∵) $(b(\alpha)b(\alpha+1)\cdots b(\alpha+m-1))^{-1} f^\vee(\frac{1}{\sqrt{-1}} y)^m f(\frac{1}{\sqrt{-1}}\,\mathrm{grad})^m\, \mathcal{F}(f^\alpha)$

$= \mathcal{F}\Big((b(\alpha)b(\alpha+1)\cdots b(\alpha+m-1))^{-1} f^\vee(\mathrm{grad})^m f(x)^m f(x)^\alpha\Big)$

$= \mathcal{F}(f^\alpha)$

∴ $(b(\alpha)b(\alpha+1)\cdots b(\alpha+m-1))^{-1} f(-\mathrm{grad})^m\, \mathcal{F}(f^\alpha) = f^{\vee -m}\, \mathcal{F}(f^\alpha)$

故に．自然な準同型写像 $\mathcal{F}(Df^\alpha) \longrightarrow \mathcal{F}(Df^\alpha)[f^{\vee -1}]$ は．onto.

Df^{α} は，holonomic であるから，$\mathcal{F}(Df^{\alpha})$ も $\mathcal{F}(Df^{\alpha})[f^{\nu-1}]$ も，holonomic になる。従って，$\mathcal{F}(Df^{\alpha})$ の characteristic cycle と，$\mathcal{F}(Df^{\alpha})[f^{\nu-1}]$ の characteristic cycle が，一致すれば，$\mathcal{F}(Df^{\alpha}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(Df^{\alpha})[f^{\nu-1}]$ となり，lem. 1 とあわせて，定理を得る。

一般に，D-module M に対して，（有限生成は，仮定する）その characteristic cycle を $\underline{ch}(M)$ と書くことにする。$\underline{ch}$ については，

V. Ginsburg : Inventiones Math. 84 (1986), 327-402

に詳しく書いてある。R.Hotta - M.Kashiwara : Invent. Math. 75 (1984), §3 より

$$\underline{ch}\ \mathcal{F}(Df^{\alpha}) = \underline{ch}\ Df^{\alpha},$$

$$\underline{ch}\ \mathcal{F}(Df^{\alpha})[f^{\nu-1}] = \underline{ch}\ Du_{\alpha,k}[f^{\nu-1}] \qquad (k \gg 0)$$

であるが，$\underline{ch}\ Df^{\alpha}$ の計算法は，[Ginsburg] に与えられている。また，$\underline{ch}\left(Du_{\alpha,k}\big|_{\Omega^{\nu}}\right)$ は，簡単に求まるから，再び，[Ginsburg] に与えられた計算法を用いれば，$\underline{ch}\left(Du_{\alpha,k}[f^{\nu-1}]\right)$ が，求まる。その結果を見くらべて，

$$\underline{ch}\ Df^{\alpha} = \underline{ch}\ Du_{\alpha,k}[f^{\nu-1}] \qquad (k \gg 0)$$

を得る。$\therefore$ $\underline{ch}\ \mathcal{F}(Df^{\alpha}) = \underline{ch}\ \mathcal{F}(Df^{\alpha})[f^{\nu-1}]$. ▨

4.

$v \in \Omega$ に対し、$v^\vee = F(v)$ とおくと、$F : \Omega \longrightarrow V^\vee$ は、接空間の上に、線形写像

$$\begin{array}{ccccc} F_{*v} & : & T_v\Omega & \longrightarrow & T_{v^\vee}V^\vee \\ & & \| & & \| \\ & & V & & V^\vee \end{array}$$

を、ひきおこす。$T_v\Omega$ 上の双一次形式 B_v を、次式で定める：

$$B_v(p, q) = \langle F_{*v}(p), q \rangle \qquad (p, q \in T_v\Omega)$$

<u>Lemma 2.</u> (i) $G_v = \{ g \in G \mid gv = v \}$ とおくと、B_v は、G_v-*invariant symmetric bilinear form* になる。
(ii) さらに、$v \in O_1$ であれば、$B_v|_{T_vO_1}$ は非退化になる。

∵) (i) B_v に対応する行列は $\left(\dfrac{\partial^2 \log f}{\partial x_i \partial x_j}(v) \right)_{1 \le i, j \le n}$ であるから、主張は、簡単な計算で、たしかめられる。

(ii) $B_v(T_vO_1, q) = 0$, $q \in T_vO_1$ とすると、

$$0 = B_v(T_vO_1, q) = \langle F_{*v}(T_vO_1), q \rangle = \langle T_{v^\vee}O_1^\vee, q \rangle$$

（[Tsukuba ; 定理 A] より）また、同じ定理より

- $(T_{v^\vee}O_1^\vee)^\perp$ は $F : \Omega \to O_1^\vee$ の fibre の接空間
- O_1 は $F : \Omega \to O_1^\vee$ の cross section. 従って、T_vO_1 は、cross section の接空間。

$\therefore\ q \in (T_vO_1) \cap (T_{v^\vee}O_1^\vee)^\perp = \{0\}$. ▨

$v \in O_1$ とし、$\{z_1, \cdots, z_n\}$ を、v における V の局所座標で、次の条件をみたすものとする：

(1) $O_1 = \{(z_1 \cdots z_n) \mid z_{m+1} = \cdots = z_n = 0\}$

(2) $z_i' = z_i|_{O_1}$ とすると $\{z_1', \cdots, z_m'\}$ は、v における O_1 の局所座標

(3) $z_i'' = z_i|_{F^{-1}(v^\vee)}$ とすると、$\{z_{m+1}'' \cdots z_n''\}$ は、v における $F^{-1}(v^\vee)$ の局所座標。但し $v^\vee = F(v)$.

$v^\vee$ における $V^\vee$ の局所座標 $\{z_1^\vee \cdots z_n^\vee\}$ も、同様に定める。

lemma 2 により、O_1 の接空間上には、non-degenerate, symmetric bilinear form が、与えられたから、リーマン幾何学における種々の概念が、形式的に真似られる。ここでは、volume form の類似物を考えたい：

$$\omega(v) := \left(\det\ B_v\left(\frac{\partial}{\partial z_i'}, \frac{\partial}{\partial z_j'}\right)_{1 \le i, j \le m}\right)^{\frac{1}{2}} dz_1' \wedge \cdots \wedge dz_m'$$

とおくと、ω は O_1 上の G-invariant m-form で、どのような $v \in O_1$ に対しても $\omega(v) \neq 0$ となる。ω は、二価になるが、以下では $\left|\left(\omega|_{O_1(\mathbb{R})}\right)\right|$ のみが、必要となるので、気にする必要はない。

以下、(G, ρ, V) の real structure を、ひとつ固定する。(cf. [Tsukuba ; §4]. 以下、そこの記号を使う。) $\Omega^\vee(\mathbb{R})$ 上の hyperfunction $|h^\vee|$ を、次式で定める：

$$|h^\vee| = \left| \frac{F^{\vee *}\omega \wedge \delta(\check{z}_{m+1}, \cdots, \check{z}_n)\,(d\check{z}_{m+1} \wedge \cdots \wedge d\check{z}_n)}{dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n} \right|$$

但し $|\delta| = \delta$ と約束する。$|F^{\vee *}\omega|$ は、$\Omega^\vee(\mathbb{R})$ 上で、real analytic であるから、上式は、意味を持つ。

Lemma 3. $|f^\vee|^{-\alpha}|h^\vee| \in \mathcal{B}(\Omega^\vee(\mathbb{R}))$ は、$D\mathcal{U}_{\alpha,k}$（を定義する方程式系 (1), (2)）の、解である。

∵) $|f^\vee|^{-\alpha}$ は $\Omega^\vee(\mathbb{R})$ 上で、real analytic だから、積は、意味を持つ。$|h^\vee|$ の $G(\mathbb{R})^+$（$= G(\mathbb{R})$ の単位連結成分）に関する相対不変性を考えよう。$|h^\vee|$ の定義式の分子は、$G(\mathbb{R})^+$ に関し絶対不変であり、分母は、相対不変で、対応する指標は

$$|dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n|^{-1} \leftrightarrow (\det \check{\rho}(g))^{-1} = \det \rho(g) \qquad (g \in G(\mathbb{R})^+).$$

$$\therefore\ |\check{f}|^{-\alpha}|h^\vee| \leftrightarrow \det \rho(g) \times \phi(g)^\alpha$$

故に、方程式系 (1) が、みたされる。$|h^\vee|$ が、$\delta(z_{m+1}, \cdots, z_n)$ を factor にもつから、方程式系 (2) もみたされる。▨

Remark.

$$|\check{f}|_j^{-\alpha}|h^\vee| = \begin{cases} |f^\vee|^{-\alpha}|h^\vee| & \text{on } \Omega_j^\vee \\ 0 & \text{on } \Omega_k^\vee \ (k \neq j) \end{cases}$$

$$(j = 1, 2, \cdots, l)$$

とおくと、これらも、$D\mathcal{U}_{\alpha,k}$ の解になる。

Lemma 4. $\alpha \in A_-$ であれば、

$$\Gamma(V^\vee(\mathbb{R}), \mathcal{H}om_D(\mathcal{F}(Df^\alpha), \mathcal{B}))$$
$$= \Gamma(\Omega^\vee(\mathbb{R}), \mathcal{H}om_D(\mathcal{F}(Df^\alpha), \mathcal{B}))$$

但し、$\mathcal{B}$ は hyperfunctions のなす sheaf.

Remark. 一般に、可換環 A に対して、A-modules の category と、Spec(A) 上の quasi-coherent sheaves の category は、同型であるので、A-module と、Spec(A) 上の quasi-coherent sheaf は、特に区別しない。

Remark. 上の lemma は、次のようにも云える：$\mathcal{F}(Df^\alpha)$ の $\Omega^\vee(\mathbb{R})$ 上の hyperfunction 解は、一意的に $V^\vee(\mathbb{R})$ 上の解にのばせる。以下、両者を、区別しない。

証明 holonomic D-module M に対し $\mathbb{D}(M)$ を M の dual とする。すなわち

$$\mathbb{D}(M) = \left(\mathbb{R}\mathcal{H}om_D(M, D) \underset{\mathbb{C}[V]}{\otimes} \mathbb{C}[V](dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)^{\otimes -1}\right)[n].$$

すると、

$$Df^\alpha = \mathbb{D}\left(Df^{-\alpha+k'}\right) \qquad (\alpha \in A_-,\ k' \in \mathbb{Z},\ \gg 0)$$

が、わかる。(cf. §7 Appendix.)

$$\therefore\ \mathcal{F}(Df^\alpha) = \mathcal{F}\,\mathbb{D}(Df^{-\alpha+k'}) = \mathbb{D}\,\mathcal{F}(Df^{-\alpha+k'})$$
$$= \mathbb{D}\left(D u_{\alpha,k}[f^{\vee -1}]\right) \qquad (k \gg 0)$$

最後の等式は、定理B（D-module version）による。定義より、

$$\mathcal{B} = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}\Gamma_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{C}),\ \mathbb{R}\Gamma_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{O}^{an}))$$
$$\cong \mathbb{R}\Gamma_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{O}^{an})[n]$$

但し、$\mathcal{O}^{an}$は、holomorphic functions の sheaf、最後の同型は canonical ではない。

$$\mathbb{R}\Gamma_{(V^\vee-\Omega^\vee)(\mathbb{R})}\ \mathbb{R}\mathcal{H}om_D(\mathcal{F}(Df^\alpha),\ \mathcal{B})$$
$$\cong \mathbb{R}\Gamma_{(V^\vee-\Omega^\vee)(\mathbb{R})}\ \mathbb{R}\mathcal{H}om_D(\mathcal{F}(Df^\alpha),\ \mathcal{O}^{an})[n]$$
$$= \mathbb{R}\Gamma_{(V^\vee-\Omega^\vee)(\mathbb{R})}\ \mathbb{R}\mathcal{H}om_D(\mathbb{D}(Du_{\alpha,k}[f^{\vee-1}]),\ \mathcal{O}^{an})[n]$$
$$= \mathbb{R}\Gamma_{(V^\vee-\Omega^\vee)(\mathbb{R})}\ \mathbb{R}\mathcal{H}om_{D^{an}}(\mathcal{O}^{an},\ D^{an}u_{\alpha,k}[f^{\vee-1}])[n]$$
$$= \mathbb{R}\Gamma_{(V^\vee-\Omega^\vee)(\mathbb{R})}\ \mathbb{R}\Gamma_{\Omega^\vee}\ \mathbb{R}\mathcal{H}om_{D^{an}}(\mathcal{O}^{an},\ D^{an}u_{\alpha,k}[f^{\vee-1}])[n]$$
$$= 0. \qquad (D^{an} := \mathcal{O}^{an}\otimes_{\mathbb{C}[V^\vee]} D)$$

ここで、$K^\bullet = \mathbb{R}\mathcal{H}om_D(\mathcal{F}(Df^\alpha),\ \mathcal{B})$ とおくと

$$\mathbb{R}\Gamma_{(V^\vee-\Omega^\vee)(\mathbb{R})}K^\bullet \longrightarrow K^\bullet \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_{\Omega^\vee(\mathbb{R})}K^\bullet \xrightarrow{+1} \quad \text{distinguished}$$

$$\mathbb{R}\Gamma_{(V^\vee-\Omega^\vee)(\mathbb{R})}K^\bullet = 0$$

$$\therefore\quad K^\bullet \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{\Omega^\vee(\mathbb{R})}K^\bullet$$

$$\therefore\ \mathbb{R}\Gamma(V^\vee(\mathbb{R}),\ \mathbb{R}\mathcal{H}om_D(\mathcal{F}(Df^\alpha),\ \mathcal{B}))$$
$$\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma(V^\vee(\mathbb{R}),\ \mathbb{R}\Gamma_{\Omega^\vee(\mathbb{R})}\mathbb{R}\mathcal{H}om_D(\mathcal{F}(Df^\alpha),\ \mathcal{B}))$$
$$= \mathbb{R}\Gamma(\Omega^\vee(\mathbb{R}),\ \mathbb{R}\mathcal{H}om_D(\mathcal{F}(Df^\alpha),\ \mathcal{B}))$$

Grothendieck のスペクトル列

$$E_2^{ij} = H^i(V^\vee(\mathbb{R}),\ \mathcal{E}xt^j_D(\mathcal{F}(Df^\alpha),\ \mathcal{B}))$$
$$\Rightarrow H^{i+j}(\mathbb{R}\Gamma(V^\vee(\mathbb{R}),\ \mathbb{R}\mathcal{H}om_D(\mathcal{F}(Df^\alpha),\ \mathcal{B}))$$

及び、$V^\vee(\mathbb{R})$ を $\Omega^\vee(\mathbb{R})$ におきかえたもの の E_2^{00}-termsを比べて、上記lemmaを得る。 ▨

Remark. 上の証明で、derived categoryの理論における記号を、ことわりなく使った。derived category については：

J.L. Verdier : Catégories dérivées (Etat 0) SLN. 569

ただし、私には p268 の次の行が、わかりません：

– La somme de deux triangles distingués est distinguée.

$(X_i\ Y_i\ Z_i\ u_i\ v_i\ w_i)$ $(i=1,2)$ が distinguished であれば、$(X_1+X_2,\ Y_1+Y_2,\ Z_1+Z_2,\ u_1+u_2\ \ v_1+v_2\ \ w)$ が distinguished になるように、w をえらぶことはできますが、$w=w_1+w_2$ ととれるかどうか、私にはわかりません。なお、[Beilinson – Bernstein – Deligne : Astérisque 100] の Remark 1.1.13 の axiom を (TR1) ~ (TR4) につけ加えれば、$w=w_1+w_2$ と、とれることは、証明できます。（この項、読者への質問）

lem. 1 と lem. 4 をあわせて

Lemma 5. $\mathcal{F}(Df^\alpha)$ の $\mathcal{B}(V^\vee(\mathbb{R}))$-solutionsの全体は、$\{|f^\vee|_j^{-\alpha}|h_j^\vee|\ \ j=1,2,\cdots,\ell\}$ ではられる ℓ 次元ベクトル空間。ただし、$\alpha\in A_-$ とする。

Lemma 6. $\alpha \in A_+$ であれば、

$$\dim \mathcal{H}om_{D}(Df^{\alpha}, \mathcal{B})_0 = l$$

ここで $(\cdots)_0$ は、V の原点 0 における stalk を意味する。

∵) $\left.\begin{array}{l} j : \Omega \longrightarrow V = \mathbb{C}^n \\ j_{\mathbb{R}} : \Omega(\mathbb{R}) \longrightarrow V(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \end{array}\right\}$ を inclusion mappings とする。

$$\begin{aligned} & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{D}(Df^{\alpha}, \mathcal{B}) \\ \cong\ & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{D}(Df^{\alpha}, \mathbb{R}\Gamma_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{O}^{an}))[n] \\ =\ & \mathbb{R}\Gamma_{\mathbb{R}^n}\, \mathbb{R}\mathcal{H}om_{D}(Df^{\alpha}, \mathcal{O}^{an})[n] \\ =\ & \mathbb{R}\Gamma_{\mathbb{R}^n}\left(\mathbb{R}j_*(\mathbb{C}f^{\alpha})\right)[n] \end{aligned}$$

(Appendix 参照)

ここで、$\mathbb{C}f^{\alpha}$ は Ω 上の locally constant sheaf.

$$\begin{aligned} =\ & \mathbb{R}j_{\mathbb{R}*}\, \mathbb{R}\Gamma_{\Omega(\mathbb{R})}(\mathbb{C}f^{\alpha})[n] \\ \cong\ & \mathbb{R}j_{\mathbb{R}*}\left(\bigoplus_{j=1}^{l} \mathbb{C}_{\Omega_j}\right) \end{aligned}$$

ここで、$\mathbb{C}_{\Omega_j}$ は、Ω_j 上の定数層 $\mathbb{C}_{\Omega_j}$ を $\Omega(\mathbb{R})$ 全体に zero extension したもの。

$$\therefore\ \mathcal{E}xt^{p}_{D}(Df^{\alpha}, \mathcal{B})_0 \cong \bigoplus_{j=1}^{l} \varinjlim_{U} H^p(\Omega_j \cap U, \mathbb{C})$$

ここで、U は、0 の近傍。

$$\therefore\ \mathcal{H}om_{D}(Df^{\alpha}\ \mathcal{B}) \cong \bigoplus_{j=1}^{l} \varinjlim_{U} \Gamma(\Omega_j \cap U, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^l \qquad ▨$$

<u>Remark</u>. 上記 lemma は、f を任意の多項式としても成立する。

$s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$ の時。

11.

$$|f|_j^s(x) = \begin{cases} |f(x)|^s & (x \in \Omega_j) \\ 0 & (x \notin \Omega_j) \end{cases}$$

とすると、連続函数が定まる。sについて解析接続する：

$Re(s) > -m$ ならば

$$|f|_j^s := \big(b(s)\,b(s+1)\cdots b(s+m-1)\big)^{-1} f^\vee(\mathrm{grad})^m\, |f|_j^{s+m} \times \big(\mathrm{sgn}(f|_{\Omega_j})\big)^m$$

$|f|_j^s$ は、sについて、全平面上、一価有理型函数になり、$s \in A_+$ では、正則になる。 $\left(\mathrm{sgn}(*) = \begin{cases} 1 & (*>0) \\ -1 & (*<0) \end{cases} \right)$

Lemma 7. $\alpha \in A_+$ であれば、Df^α の $\mathcal{B}(V(\mathbb{R}))$-solutions の全体は、$\{ |f|_j^\alpha \;\; j=1,2,\cdots,l \}$ ではられる l次元ベクトル空間。

∵) fが、同次多項式であるから、

$$\mathcal{H}om_D(Df^\alpha, \mathcal{B})_0 \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_D(Df^\alpha, \mathcal{B}).$$

従って、lem. 6 より、上記 lemma を得る。▨

定理 B (hyperfunction version)

(i) $|f^\vee|_j^{-\alpha}|h^\vee|$ は、解析接続により、αについて全平面で、一価有理型になり、A_- 上では、正則になる。

(ii) ある有理型函数 $c_{ij}(\alpha)$ が存在して、

$$\mathcal{F}(|f|_i^\alpha) = \sum_{j=1}^{l} c_{ij}(\alpha)\, |f^\vee|_j^{-\alpha}|h^\vee| \qquad (i=1,2,\cdots,l)$$

さらに $c_{ij}(\alpha)$ は、A_+ 上では、正則。

∵) $\alpha\in A_+\cap A_-$ であれば、lem. 5 と lem. 7 より、ある函数 $c_{ij}(\alpha)$ があって、

(*) $$\mathcal{F}(|f|_i^{\alpha})=\sum_{j=1}^{l} c_{ij}(\alpha)\,|f^\vee|_j^{-\alpha}|\omega^\vee| \qquad (i=1,2,\cdots,l)$$

$(c_{ij}(\alpha))$ は、2つの bases の間の変換行列であるから、その行列式は $\neq 0$。(*) を $\Omega^\vee(\mathbb{R})$ に制限して考えよう。$|f_i|^{\alpha}$、従って、$\mathcal{F}(|f|_i^{\alpha})$ は、α について、全平面一価有理型で、A_+ 上では正則。$|f^\vee|_j^{-\alpha}|\omega^\vee|\Big|_{\Omega^\vee(\mathbb{R})}$ は、全平面で正則で、$\mathcal{F}(Df^{\alpha})$ の $\mathcal{B}(\Omega^\vee(\mathbb{R}))$-solutions 全体がなすベクトル空間の basis になる。故に $c_{ij}(\alpha)$ は、全平面一価有理型で、A_+ 上で正則になる。従って、$(c_{ij}(\alpha))^{-1}$ は、全平面一価有理型で、$\mathcal{F}(|f|_i^{\alpha})$ も、そうであったことを思い出すと、(*) より、$|f^\vee|_j^{-\alpha}|\omega^\vee|$ も、全平面一価有理型であることがわかる。もし、$|f^\vee|_j^{-\alpha}|\omega^\vee|$ が、p 次の極を $\alpha=\alpha_0\ (\in A_-)$ で、持ったとすると、

$$\left(|f^\vee|_j^{-\alpha}|\omega^\vee|\times(\alpha-\alpha_0)^p\right)\Big|_{\alpha=\alpha_0}$$

は、$\mathcal{F}(Df^{\alpha})$ の $\mathcal{B}(V^\vee(\mathbb{R}))$-solution であり、その support は、$(V^\vee-\Omega^\vee)(\mathbb{R})$ に含まれる。(∵ $\Omega^\vee(\mathbb{R})$ に制限すれば、正則であった。) これは、lem. 4 と矛盾する。故に、$|f^\vee|_j^{-\alpha}|\omega^\vee|$ は、A_- 上で、正則。▨

<u>Remark.</u> Sato-Shintani : Ann. Math. 100 (1974) では、さらに c_{ij} が、Γ 函数と、exponential factor の積になることが示される。

我々の situation では、(解析的な正当化は、少し雑にするが)
[Sato-Shintani] の (1.16), (1.17), (1.18) の部分が、以下の形になる：

> $\varepsilon_i = \mathrm{sgn}(f|_{\Omega_i})$ とすると、
>
> (1.16') $\quad f^\vee(\mathrm{grad}_x)\, t\, \delta(t - |f(x)|_i) = \varepsilon_i\, b(-\frac{\partial}{\partial t} t)\, \delta(t - |f(x)|_i)$, $(t>0)$

∵ $\int_0^\infty (\quad) t^s\, dt$ なる変換により、左辺 $\longmapsto f^\vee(\mathrm{grad})\, |f(x)|_i^{s+1}$
右辺 $\longmapsto \varepsilon_i\, b(s)\, |f(x)|_i^s$ ▨

> $\{t \in \mathbb{R} \mid t>0\} =: \mathbb{R}_{>0}$ 上の実解析函数 $F_{ij}(t)$ $(1 \leq i, j \leq l)$ が
> 存在して、$\left(\mathcal{F}(-)(y) = \int_{V(\mathbb{R})} (-)\, e^{\sqrt{-1}\langle x, y\rangle}\, dx \right)$
>
> (1.17') $\quad \mathcal{F}(\delta(t - |f(x)|_i))(y) = \int_0^\infty F_{ij}(tu)\, |h^\vee(y)|\, \delta(u - |f^\vee(y)|_j)\, \frac{du}{u}$
>
> $(t>0,\ y \in \Omega_j^\vee)$

∵ $\varphi(y) \in \mathbb{C}[V^\vee]$, $\varphi \equiv 0$ on $O_i^\vee$ なら、$\int_0^\infty (\quad) t^s dt$ により、
$\varphi(y)\mathcal{F}(\delta(t - |f(x)|_i))(y) \mapsto 0$、故に変換する前から "$=0$"、一方、
$\mathcal{F}(\delta(\phi(g)t - |f(x)|_i))(gy) = (\phi\phi_0)(g)\, \mathcal{F}(\delta(t - |f(x)|_i))(y)$, $(g \in G(\mathbb{R})^+$, $\phi_0 = \det\rho)$ であるから、$\mathcal{F}(\delta(t - |f(x)|_i))(y) = \widetilde{F}_{ij}(t, y)\, |h^\vee(y)|\, |f^\vee(y)|^{-1}$, $(t>0,\ y \in \Omega_j^\vee)$
とおくと、$\widetilde{F}_{ij}(\phi(g)t, gy) = \widetilde{F}_{ij}(t, y)$, $(y \in \Omega_j^\vee \cap O_i^\vee)$.
∴ 一変数函数 $F_{ij}(t)$ が存在して、$\widetilde{F}_{ij}(t, y) = F_{ij}(t\, |f^\vee(y)|_j)$, $(y \in \Omega_j^\vee \cap O_i^\vee)$.

$$\therefore\ \mathcal{F}(\delta(t - |f(x)|_i))(y) = F_{ij}(t\, |f^\vee(y)|_j)\, |h^\vee(y)|\, |f^\vee(y)|^{-1}$$
$$= \int_0^\infty F_{ij}(tu)\, |h^\vee(y)|\, \delta(u - |f^\vee(y)|_j)\, \frac{du}{u}$$
$$(t>0,\ y \in \Omega_j^\vee)$$ ▨

> $\varepsilon_j^\vee = \mathrm{sgn}(f^\vee|_{\Omega_j^\vee})$ とすると、
>
> (1.18') $\quad b(-\frac{\partial}{\partial t} t)\, F_{ij}(t) = \varepsilon_i \varepsilon_j^\vee (-\sqrt{-1})^d\, t\, F_{ij}(t)$

$(d = \deg f = \deg f^\vee)$

$\because$ $f^\vee\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}y\right) t\, \mathcal{F}\left(\delta(t-|f(x)|_i)\right)(y) = \varepsilon_i\, b(-\frac{\partial}{\partial t}t)\ \mathcal{F}\left(\delta(t-|f(x)|_i)\right)(y)$

$\left(y \in \Omega_j^\vee,\ t>0 \right.$; (1.16′) の Fourier 変換 $\left.\right)$ (1.17′) より.

$$\text{左辺} = \int_0^\infty \underline{F_{ij}(tu)\ \varepsilon_j^\vee \left(\tfrac{1}{\sqrt{-1}}\right)^d tu}\ .\ |h^\vee(y)|\ \delta(u-|f^\vee(y)|_j)\ \frac{du}{u}$$

$$\text{右辺} = \int_0^\infty \underline{\varepsilon_i\, b(-\tfrac{\partial}{\partial t}t)\ F_{ij}(tu)}\ .\ |h^\vee(y)|\ \delta(u-|f^\vee(y)|_j)\ \frac{du}{u}$$

下線分が、等しくなり, $u=1$ として (1.18′) を得る ▨

ここまで [Sato-Shintani] の議論の formal な部分のみを. 抽出したものである。解析的な正当化は [Sato-Shintani] と同様にして. できる。

このあと. [Sato-Shintani] では. 無限遠に不確定特異点を持つ微分方程式 (1.18′) の解析により. F_{ij} の形を決め [S-S. ; Thm 1] を証明する。

Appendix (§7)、 ここでは. D^{an} を D と書く.

f を正則函数とし、 $(f \in \mathcal{O}_X^{an})$

$N = N_f = D[s]\, f^s$, $N_\alpha = N_f/(s-\alpha)N_f$, $f^\alpha := (f^s \bmod (s-\alpha)N)$

とすると. $N_\alpha = Df^\alpha$.

$P_0(s, x, \partial_x)\, f^{s+1} = b_f(s)\, f^s$ (Bernstein の等式)

とし. $P_0(s) = P_0(s, x, \partial)$, $b(s) = b_f(s)$ と. 略す。$\mathbb{C}[s, t]$ を. $ts - st = t$ なる関係式で定まる $\mathbb{C}$- algebra とし. $D[s\,t] = D \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[s\,t]$ $(\Leftrightarrow\ st = t(s-1))$

とする。N は、$t\cdot P(s)f^s := P(s+1)f\cdot f^s$ とすることで、$D[s,t]$-module になる。§7 におけると同様

$$A_- = \{\alpha\in\mathbb{C} \mid b(\alpha-j)\neq 0 \quad (j=1,2,3,\cdots)\}$$

$$A_+ = \{\alpha\in\mathbb{C} \mid b(\alpha+j)\neq 0 \quad (j=0,1,2,\cdots)\}$$

とおく。

Lemma 1. N' を $D[s,t]$-module とし、

$$s-\alpha-jk : N'/t^kN' \longrightarrow N'/t^kN' \qquad (j=0,1,\cdots,(l-1))$$

が、injective であれば、$(s-\alpha)N'\cap t^{kl}N' = (s-\alpha)t^{kl}N'$.

∵) ⊃ は、trivial. ⊂ を示す。条件より

$$(s-\alpha-jk)N'\cap t^kN' \subset (s-\alpha-jk)t^kN' \qquad (j=0,1,\cdots,l-1)$$

$$\therefore (s-\alpha)N'\cap t^{kl}N' = (s-\alpha)N'\cap t^kN'\cap t^{kl}N' \subset (s-\alpha)t^kN'\cap t^{kl}N'$$

$$= t^k((s-\alpha-k)N'\cap t^{(k-1)l}N') \subset\cdots\subset t^{kl}((s-\alpha-kl)N'\cap N')$$

$$= (s-\alpha)t^{kl}N'$$

▨

Lemma 2 $b'(s)(N'/tN')=0 \quad (b'(s)\in\mathbb{C}[s])$

$b'(\alpha+j)\neq 0 \qquad (j=0,1,\cdots,m-1)$

ならば、$(s-\alpha)N'\cap t^mN' = (s-\alpha)t^mN'$

∵) $(b'(s), s-\alpha-j)=1 \quad (j=0,1,\cdots,m-1)$ より、

$$\exists p_j(s),\ q_j(s) \qquad p_j(s)b(s)+q_j(s)(s-\alpha-j)=1. \qquad (j=0,1\cdots m-1)$$

$\therefore 1 = q_j(s)(s-\alpha-j)$ on N'/tN' $\quad\therefore s-\alpha-j : N'/tN' \to N'/tN'$ は、isomorphism. 特に injective. lem. 1 $(k=1,\ l=m)$ を使って、結論を得る。▨

Lemma 3 (i) $b(\alpha-j)\neq 0$ $(j=1,2,\cdots,m)$ $\Rightarrow$ $\mathcal{D}f^{\alpha} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}f^{\alpha-m}$.

(ii) $b(\alpha+j)\neq 0$ $(j=0,1,2,\cdots,m-1)$ $\Rightarrow$ $\mathcal{D}f^{\alpha} \xleftarrow{\sim} \mathcal{D}f^{\alpha+m}$

(iii) $\alpha\in A_-$ $\Rightarrow$ $\mathcal{D}f^{\alpha} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}f^{\alpha}[f^{-1}]$.

∵) (i) $f^{\alpha}\mapsto f^{m}\cdot f^{\alpha-m}$ の逆写像の作り方は、Thm B (D-module version) の証明を参照して下さい。(ii) も同じ。(iii) について、$\mathcal{D}f^{\alpha}\to\mathcal{D}f^{\alpha}[f^{-1}]$ が onto になることは同様にしてわかる。この写像で、$Pf^{\alpha}\mapsto 0$ となったとする。ord $P=m$ とすると、

$$\exists a(s,x)\in\mathcal{O}^{an}[s] \qquad Pf^{s}=a(s,x)f^{s-m} \quad \text{on } f^{-1}\mathbb{C}^{\times}$$

$$\therefore\ a(\alpha,x)\equiv 0 \quad \text{on } f^{-1}\mathbb{C}^{\times} \qquad \therefore\ a(\alpha,x)=0.$$

ここで、$a(s\ x)=(s-\alpha)\ a_1(s,x)$ とすると、

$$Pf^{s+m}=a(s+m,x)f^{s}=(s+m-\alpha)\ a_1(s+m,x)f^{s}$$

$$\in (s-(\alpha-m))N\cap t^{m}N$$

しかるに、$b((\alpha-m)+j)\neq 0$ $(j=0,1,\cdots,m-1)$.

$$\therefore\ Pf^{s+m}\in t^{m}(s-\alpha)N \qquad \therefore\ Pf^{s}\in(s-\alpha)N \qquad \therefore Pf^{\alpha}=0$$

(X,f) に対して、$f^{-1}(0)$ の特異点を blow up して、

$$\begin{array}{l} X' \\ F\downarrow \\ X\ \supset\ f^{-1}\mathbb{C}^{\times} \end{array}$$

を作り、$f':=f\circ F$ とおく。$f'^{-1}(0)$ が normal crossing になっているものとする。(特異点の解消)

$$N'=\int_F^0 N_{f'} \qquad N''=\mathcal{D}[s]\,(1_{X\leftarrow X'}\otimes f'^{s})$$

とおくと、 $N' \supset N'' \overset{\exists\varphi}{\twoheadrightarrow} N_f$ 。(Kashiwara : Invent. math. 38 (1976) の (5.9)，実際，付録(§7) のここまでの部分は，この論文を，書き写しているにすぎない。) この時 $\ker\varphi$ は，holonomic $D[s\,t]$-module になるから，$m \gg 0$ ならば，

(*) $\qquad t^m \ker\varphi = 0.$ $\qquad$ [Kashiwara ; (5.11)]

Lemma 4. (i) $t^m N'' \xrightarrow[\sim]{\varphi} t^m N_f$

(ii) $t^m N'' / (s-\alpha) t^m N'' \xrightarrow{\sim} Df^{\alpha+m}$

∵) (i) $u \in N''$, $\varphi(t^m u) = 0$ とすると，$t^m \varphi(u) = 0$. $t : N_f \to N_f$ は injective だから．$\varphi(u) = 0$, $u \in \ker\varphi$, $t^m u = 0$. (ii) は，明白 ▨

Lemma 5. $\int_F^i N_{f'}$ $(i > 0)$ は，holonomic $D[s, t]$-modules

∵) $ch\left(\int_F^i N_{f'}\right) \subset \{(x, \xi) \in T^*X \mid (x, \xi) \in ch\, N_f,\ x \in f^{-1}(0)\}$

$$\subsetneqq W_f = ch\, N_f \qquad (\text{cf. [Kashiwara]})$$ ▨

m を大きくとり直して，

(**) $\qquad t^m \int_F^i N_{f'} = 0 \qquad \forall i > 0$

とする．

Lemma 6. $b_{f'}(\alpha + j) \neq 0$ $(j = 0, 1, \cdots, m-1)$ であれば，

(i) $\mathcal{N}'/(s-\alpha)\mathcal{N}' \xrightarrow{\sim} \int_F^0 Df'^{\alpha}$.

(ii) $\int_F^i Df'^{\alpha} = 0 \qquad (i > 0)$

∵) (i)
$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & N_{f'} & \xrightarrow{s-\alpha-m} & N_{f'} & \longrightarrow & Df'^{\alpha+m} & \to 0 \\
& \downarrow t^m & & \downarrow t^m & & \downarrow \wr & \\
0 \to & N_{f'} & \xrightarrow{s-\alpha} & N_{f'} & \longrightarrow & Df'^{\alpha} & \to 0
\end{array}$$

$$\therefore \quad \begin{tikzcd} & & & \int_F^0 Df'^{\alpha+m} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \int_F^1 N_{f'} \arrow[d, "t^m=0"] \\ 0 \arrow[r] & \int_F^0 N_{f'} \arrow[r, "s-\alpha"] & \int_F^0 N_{f'} \arrow[r] & \int_F^0 Df'^{\alpha} \arrow[r] & \int_F^1 N_{f'} \end{tikzcd}$$

$$\therefore \quad 0 \longrightarrow \int_F^0 N_{f'} \xrightarrow{s-\alpha} \int_F^0 N_{f'} \longrightarrow \int_F^0 Df'^{\alpha} \longrightarrow 0 .$$

(ii) (i)と同様に

$$\begin{tikzcd} & & & \int_F^1 Df'^{\alpha+m} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \int_F^2 N_{f'} \arrow[d, "t^m=0"] \\ 0 \arrow[r] & \int_F^1 N_{f'} \arrow[r, "s-\alpha"] & \int_F^1 N_{f'} \arrow[r] & \int_F^1 Df'^{\alpha} \arrow[r] & \int_F^2 N_{f'} \end{tikzcd}$$

$$\therefore \quad 0 \longrightarrow \int_F^1 N_{f'} \xrightarrow{s-\alpha} \int_F^1 N_{f'} \longrightarrow \int_F^1 Df'^{\alpha} \longrightarrow 0 .$$

lem. 5 より. $\int_F^1 N_{f'}$ は. holonomic だから. $0=\int_F^1 Df'^{\alpha}$. この議論をくり返して. 結論を得る。 ▨

Lemma 7. $b_{f'}(\alpha+j) \neq 0 \quad (j=0,1,\cdots,2m-1)$ とすると.

$$t^m N' / (s-\alpha) t^m N' \xrightarrow{\sim} \int_F^0 Df'^{\alpha} .$$

∵) α も. $\alpha+m$ も. lem. 6 の条件をみたすから、lem. 6 の証明より

$$(\star) \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "s-\alpha-m"] \arrow[d, "t^m"] & N' \arrow[r, "\varphi_{\alpha+m}"] \arrow[d, "t^m"] & \int_F^0 Df'^{\alpha+m} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "s-\alpha"] & N' \arrow[r, "\varphi_\alpha"] & \int_F^0 Df'^{\alpha} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

snake lemma より.

$$N'/t^m N' \xrightarrow[\sim]{s-\alpha} N'/t^m N' .$$

lem. 1 $(k=m,\ l=1)$ を使って. $(s-\alpha)N' \cap t^m N' = (s-\alpha) t^m N'$.

再び. $(\star)$を使って,

$$\int_F^0 Df'^{\alpha} = \varphi_\alpha (t^m N') \xleftarrow{\sim} \frac{t^m N'}{(s-\alpha)N' \cap t^m N'} = \frac{t^m N'}{(s-\alpha) t^m N'} \quad ▨$$

N'/N'' は holonomic $D[s,t]$-module だから、m を大きくとりなおして、

(***) $$t^m (N'/N'') = 0$$

としておく。 $t^m N' \subset N'' \subset N'$。これより、次の morphisms を得る：

$$\frac{t^{3m}N'}{(s-\alpha)t^{3m}N'} \longrightarrow \frac{t^{2m}N''}{(s-\alpha)t^{2m}N''} \longrightarrow \frac{t^{2m}N'}{(s-\alpha)t^{2m}N'} \longrightarrow \frac{t^{m}N'}{(s-\alpha)t^{m}N'}$$

$b_{f'}(\alpha+j) \neq 0$ $(j=0,1,\cdots,6m-1)$ とすると、lem. 4 (ii) と lem. 7 より、これらの morphisms は、次の morphisms を誘導する：

$$\int_F^0 Df'^\alpha \longrightarrow Df^{\alpha+2m} \longrightarrow \int_F^0 Df'^\alpha \longrightarrow Df^{\alpha+m}.$$

$b_f(\alpha+j) \neq 0$ $(j=0,1,\cdots,2m-1)$ とすると

$$\begin{tikzcd} \int_F^0 Df'^\alpha \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\text{identity}"] & Df^{\alpha+2m} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\text{identity}"'] & \int_F^0 Df'^\alpha \arrow[r] & Df^{\alpha+m} = Df^\alpha \end{tikzcd}$$

$$\therefore \ Df^\alpha \xrightarrow{\sim} \int_F^0 Df'^\alpha$$

lem. 6 (ii) より、

$$\int_F^0 Df'^\alpha = \tau_{\leq 0} \int_F Df'^\alpha \xrightarrow[\sim]{q.i.s.} \int_F Df'^\alpha$$

また、[Kashiwara] により、

$$b_f(s) \,\Big|\, b_{f'}(s)\, b_{f'}(s+1) \cdots b_{f'}(s+n) \qquad \exists n$$

であるから、以上をまとめて、次の結果を得る：

命題 (i) $\alpha \in A_- \Rightarrow Df^\alpha \xrightarrow{\sim} Df^\alpha[f^{-1}]$

(ii) $\alpha \in A_+ \Rightarrow Df^\alpha = \int_F^0 Df'^\alpha = \int_F Df'^\alpha$

(iii) $\alpha \in A_+,\ k \gg 0 \Rightarrow Df^\alpha = \mathbb{D}(Df^{-\alpha-k})$

命題の最後の部分は、次のようにして示せる：

$\alpha \in A_+$, $k \gg 0$ とすると．（$k \in \mathbb{Z}$）

$$Df^{\alpha} = \int_F Df'^{\alpha} = \int_F \mathbb{D}(Df'^{-\alpha-k'}) = \mathbb{D}\int_F Df'^{-\alpha-k'}$$

（$\because$ F = projective）

$$= \mathbb{D}(Df^{-\alpha-k}).$$

ここで．$k' \in \mathbb{Z}$ は．$\mathrm{Re}(-\alpha-k') < 0$ となるようにとれば十分。

<u>系</u>　$j : f^{-1}\mathbb{C}^{\times} \hookrightarrow X$ を inclusion mapping とすると．

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{an}}(\mathcal{O}^{an}, \mathcal{D}^{an}f^{\alpha}) = \begin{cases} \mathbb{R}j_*(\mathbb{C}f^{-\alpha}), & (\alpha \in A_-) \\ j_!(\mathbb{C}f^{-\alpha}), & (\alpha \in A_+) \end{cases}$$

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{an}}(\mathcal{D}^{an}f^{\alpha}, \mathcal{O}^{an}) = \begin{cases} j_!(\mathbb{C}f^{\alpha}), & (\alpha \in A_-) \\ \mathbb{R}j_*(\mathbb{C}f^{\alpha}), & (\alpha \in A_+) \end{cases}$$

<u>Remark</u>. 最後の<u>系</u>を除いて，$\mathcal{O}^{an} = \{$holomorphic functions$\}$，$\mathcal{D}^{an} = \mathcal{O}^{an} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{D}$ を，$\mathcal{O} = \mathcal{O}^{alg} = \{$regular functions$\}$，$\mathcal{D}$ と．おきかえても，そのまま成立する。この付録の内容は，専門家にとっては．よく知られたことと思うが，読者の便利のために．ここに書いておいた。

<u>Remark</u>. "D-module version" を "Hodge module version" に書きかえることができる。また、それから．"reduction mod. p" で．有限体上の version も得られる。